ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITE DE NANCY II
I. C. N.
Concours 1980

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Texte : 2 pages

1er problème

On considère la fonction numérique d'une variable réelle $f_{(\alpha, \beta)}$ définie par $f_{(\alpha, \beta)}(x) = x^{\alpha} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x^{\beta}}\right)$ où α et β sont deux nombres réels strictement positifs.

1. Etudier les variations et construire la courbe représentative de $f_{(1, 1)}$.

2. a) Déterminer l'ensemble de définition de $f_{(\alpha, \beta)}$

   b) Déterminer les limites de $f_{(\alpha, \beta)}$ en o et en $+\infty$

3. a) Etudier la convergence des intégrales impropres :

$$\int_0^1 f_{(\alpha, \beta)}(x)\,dx, \int_1^{+\infty} f_{(\alpha, \beta)}(x)\,dx \text{ et } \int_0^{+\infty} f_{(\alpha, \beta)}(x)\,dx$$

   b) Calculer $\int_0^{+\infty} f_{(\alpha, \beta)}(x)\,dx$ pour $\beta = 2(1 + \alpha)$

2è problème

On donne :

- un entier n supérieur ou égal à 2
- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$
- deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$

Pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}^2$ on pose $a_{ij} = p(Y = i, X = j)$ et $b_{ij} = p(Y = i / X = j)$, b_{ij} désigne une probabilité conditionnelle. On appelle A et B les matrices carrées d'ordre $n + 1$ de terme général respectif a_{ij} et b_{ij}.

... / ...

I - Dans cette question on suppose qu'il existe une constante réelle k telleque $a_{ij} = k\, C_n^{i-1}\, C_n^{j-1}$

1. Quelle est la somme des éléments de la matrice A ?

   En déduire k puis A

2. Donner les lois de probabilités de X et de Y

   Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X - 1$

   Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X

3. Etudier l'indépendance de X et de Y

   Déterminer la matrice B

   Calculer B^α pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$. En déduire les valeurs propres de B

II - Dans cette question on suppose que $a_{ij} = \frac{1}{2n}$ si $|i+j - (n+2)| = 1$

1. On pose $E = \left\{(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n+1\}^2 \ ; \ |i+j - (n+2)| = 1\right\}$

   Calculer Card E

   En déduire la matrice A

2. Déterminer les lois de probabilité de X et de Y

   Etudier l'indépendance de X et de Y

3. Déterminer la matrice B

   Démontrer que le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$: $V = \left(p\,(X=1),\ p\,(X=2),\ \ldots,\ p(X=n+1)\right)$ est un vecteur propre de B , déterminer la valeur propre associée.

N. B. : les questions I et II du problème 2 sont indépendantes.

°

° °

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail